

1 DEFINIZIONI DI BASE DELL'ALGEBRA BOOLEANA

1.1 - Correlazione tra l'algebra booleana e le tecniche dell'automazione

Riteniamo necessario premettere il motivo per cui il corso, relativo ad una materia tecnica come «AUTOMAZIONE», affronta nella fase iniziale un argomento teorico come l'algebra booleana.⁽¹⁾

Tale percorso didattico è suggerito dal fatto che nello studio dei sistemi d'automazione, come vedremo attraverso un esempio concreto, si devono affrontare problemi non risolvibili con le tecniche della matematica tradizionale ma proprio attraverso il ricorso alla logica booleana.

Analizziamone uno, molto semplice, nei termini in cui si presenta all'impiegato dell'Ufficio Tecnico di un'azienda:

Smistare automaticamente, su due diverse vie di trasporto, i colli di forma parallelepipedica in transito su un nastro trasportatore, sapendo che essi possono essere di due misure e che si hanno a disposizione due fotocellule, disposte come schematicamente mostrato in Fig. 1.1, per distinguere i colli alti da quelli bassi.

È subito evidente che il problema è diverso da quelli cui siamo abituati; esso possiede un aspetto che possiamo definire «logico» potendo essere posto nella forma:

Realizzare un automatismo che agisce secondo le regole seguenti:

- *se viene attivata solo la fotocellula F_1 allora il collo è basso e pertanto deve essere smistato sul nastro trasportatore T_1 mediante un dispositivo rotante S a due posizioni;*
- *se vengono attivate contemporaneamente le fotocellule F_1 ed F_2 allora il collo è alto e deve essere inviato al nastro T_2 .*

Dopo aver introdotto alcuni concetti fondamentali della logica booleana vedremo come, grazie ad essa, sia possibile trasformare questa forma letterale del problema in un'espressione di tipo algebrico denominata «funzione risolutrice».

Concludiamo questa breve, ma fondamentale premessa sull'algebra booleana,

⁽¹⁾ L'algebra booleana viene anche detta logica matematica, algebra logica o logica booleana.

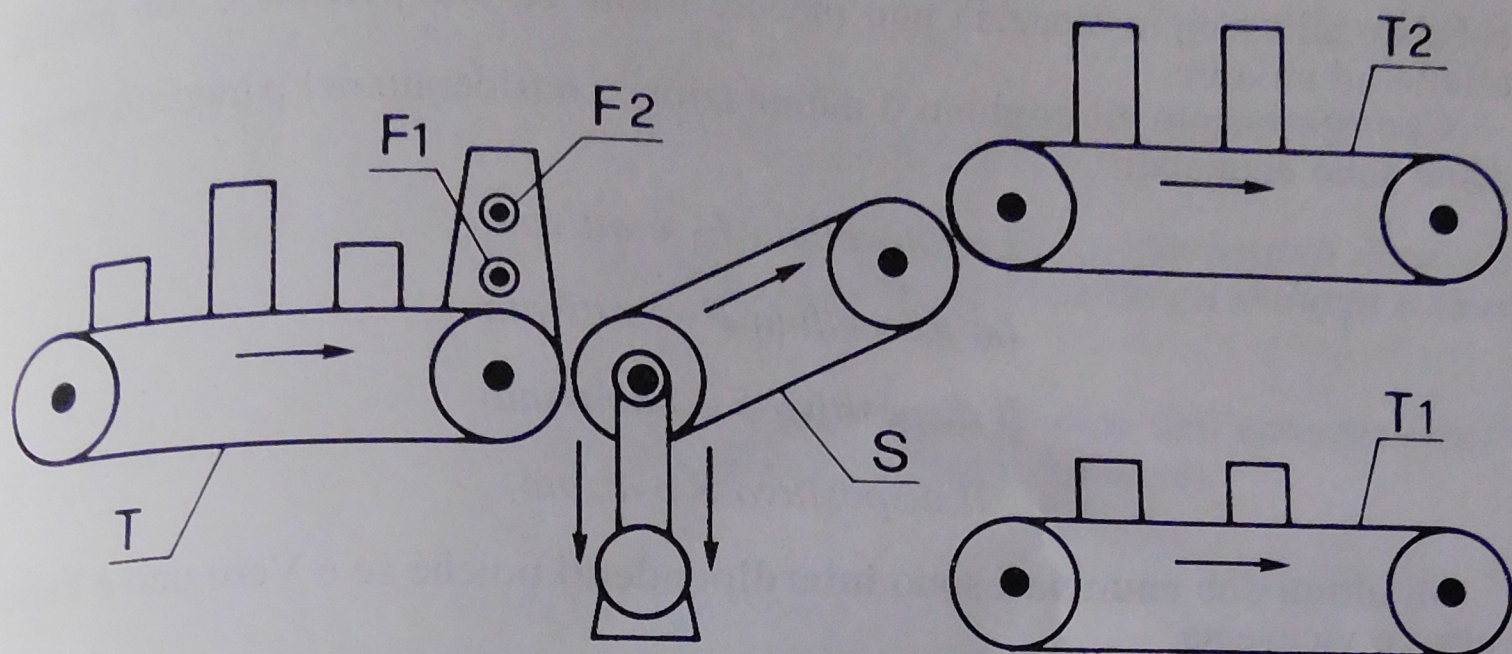


Fig. 1.1 - Stazione di smistamento colli in funzione di un controllo dimensionale. (T) Nastro alimentatore colli, (T₁) Nastro colli bassi, (T₂) Nastro colli alti, (S) Dispositivo di smistamento.

ricordando che essa deve il suo nome allo studioso irlandese **George Boole** (1815-1867) che per primo affrontò problemi di carattere logico non solo dal punto di vista filosofico, come era stato fatto fino ad allora, ma anche sotto l'aspetto rigorosamente matematico, dettando i postulati, poi ripresi e sviluppati da altri illustri matematici, come De Morgan, Peano ed altri, di quello che è sicuramente uno degli strumenti più importanti nello studio dell'automazione.

1.2 - Proposizioni logiche

Si definisce **proposizione logica**, o **enunciato**, ogni espressione letterale dichiarativa che può essere, oggettivamente, classificata come Vera o Falsa.

Ovviamente un attributo esclude l'altro nel senso che un enunciato non può essere contemporaneamente Vero e Falso.

Sono proposizioni logiche:

Milano è il capoluogo della Lombardia (Vero)

2 è minore di 5 (Vero)

ma attenzione, sono enunciati anche:

Roma è la capitale della Germania (Falso)

2 è maggiore di 5 (Falso)

non lo sono invece:

Venezia è una bella città

Paola è una ragazza fantastica

poiché non è possibile assegnare loro, oggettivamente, uno dei due attributi Vero

o Falso; ad esempio Venezia può piacere molto ad una persona e non piacere affatto ad un'altra.

Con riferimento all'esempio d'automazione considerato nel paragrafo precedente sono enunciati:

La fotocellula F_1 è attivata

La fotocellula F_2 è attivata

Il dispositivo S è abbassato

Il dispositivo S è alzato

Gli ultimi due **enunciati** sono **interdipendenti** poiché se è Vero uno è Falso l'altro e viceversa.

Per convenzione si stabilisce di:

- assegnare ai due attributi Vero e Falso rispettivamente i due valori numerici 1 e 0

$$\text{VERO} = 1$$

$$\text{FALSO} = 0$$

- rappresentare gli enunciati semplicemente per mezzo di una lettera; ad esempio:

$$F_1 = \text{«la fotocellula } F_1 \text{ è attivata»}$$

$$F_2 = \text{«la fotocellula } F_2 \text{ è attivata»}$$

$$S = \text{«il dispositivo di smistamento è abbassato»}$$

Con tali convenzioni, facendo riferimento ancora alla Fig. 1.1, possiamo esporre il problema dello smistamento dei colli in un modo certamente più sintetico di quello visto al Par. 1.1:

Realizzare un automatismo tale che:

$$\text{se } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 0 \text{ allora } S = 1$$

$$\text{se } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1 \text{ allora } S = 0$$

1.3 - Elementi binari

*Un dispositivo, di qualsiasi tipo, si dice **binario** o **digitale** quando il suo funzionamento è booleano nel senso che è caratterizzato da due soli stati possibili e incompatibili.*

Un interruttore elettrico può essere aperto o chiuso; una lampada è spenta o accesa; una valvola pneumatica può essere azionata o non azionata; un transistor può trovarsi in conduzione o in interdizione; una fotocellula può essere eccitata

oppure non eccitata; in un conduttore elettrico passa o non passa corrente elettrica; in un tubo idraulico c'è o non c'è pressione.

Tutti questi elementi sono binari dal momento che il loro comportamento è completamente definibile per mezzo di due soli stati.

L'assegnazione dei due valori numerici 1 e 0 ai due stati possibili di un elemento binario è arbitraria e non condiziona assolutamente gli sviluppi successivi dello studio.

Dagli esempi appena citati si evidenzia, per un tecnico dell'automazione, la necessità di conoscere a fondo le regole della logica booleana.

1.4 - Costanti e variabili booleane

*Si definisce **costante booleana** una grandezza capace di mantenere il proprio stato logico (1 oppure 0).*

Un collegamento elettrico fisso tra due punti di un circuito è una costante booleana poiché conserva lo stato 1 o 0 rispettivamente quando passa o non passa corrente.⁽²⁾

*Si definisce **variabile booleana** una grandezza capace di assumere indifferentemente uno dei due stati possibili (1 oppure 0).*

Un interruttore elettrico è una variabile booleana poiché può essere indifferentemente aperto (0) o chiuso (1).

Analogamente a quanto avviene per l'algebra tradizionale:

*una **variabile booleana** si dice **indipendente** quando il suo valore non dipende da altre variabili; si dice **dipendente** quando il suo stato dipende da quello di altre variabili.*

Se consideriamo il circuito elettrico della Fig. 1.2 si ha che la variabile interruttore (I) è indipendente, mentre la variabile lampada (L) dipende dalla prima, infatti essa può essere accesa ($L = 1$) solo se l'interruttore è chiuso ($I = 1$).

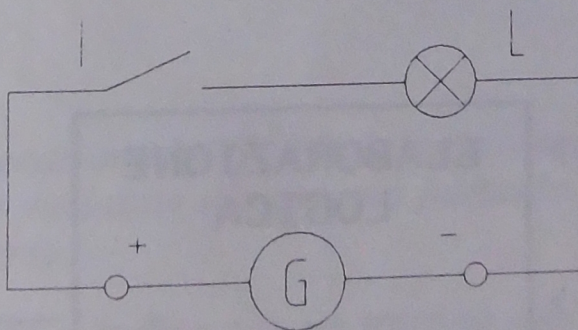


Fig. 1.2 - Circuito elettrico elementare.

⁽²⁾ Quando si assegna lo stato 1 al passaggio di corrente si parla di **logica positiva**; al contrario se al passaggio di corrente si associa lo stato 0 si ha la **logica negativa**. Nel corso faremo sempre riferimento alla logica positiva.

Nel caso invece della stazione di smistamento della Fig. 1.1 si ha che le fotocellule F_1 ed F_2 sono variabili indipendenti, mentre S è una variabile dipendente poiché il suo stato discende da quello di F_1 e di F_2 .

Dalle prime definizioni date si deduce la principale differenza tra l'algebra tradizionale e quella logica; mentre nella prima una variabile può assumere infiniti valori, nella seconda essa può assumere solo i due valori 0 ed 1, che peraltro non rappresentano nemmeno dei numeri, nel significato preciso del termine, ma indicano soltanto uno dei due stati possibili ed incompatibili caratteristici della variabile.

1.5 - Operazioni logiche fondamentali

Un'operazione logica consiste nell'elaborazione di una o più variabili booleane, dette d'ingresso, che consente di ottenere come risultato una nuova variabile, detta d'uscita, il cui stato dipende dalla combinazione dei valori assunti dalle variabili d'ingresso.

Nella letteratura tradizionale gli ingressi s'individuano con le prime lettere dell'alfabeto ($A, B, C, \dots$) mentre le uscite s'indicano con le ultime ($U, V, W, \dots$).

Nella pratica dell'automazione si preferiscono lettere che hanno una corrispondenza mnemonica con i dispositivi, ad esempio una lampada si può individuare con L , un interruttore con I ecc..., oppure che discendono da normative tecniche, ad esempio un relè si indica con K , un motore con M ecc....

Con riferimento alla Fig. 1.3 la variabile d'uscita U rappresenta il risultato dell'elaborazione logica, graficamente indicata con un quadrato, e dipende, per ciascun tipo di operazione, dallo stato assunto dalle variabili d'ingresso A, B e C .

Le **operazioni fondamentali** dell'algebra logica sono quattro:

- *Affermazione o Identità (YES),*
- *Negazione o Inversione (NOT),*
- *Somma logica (OR),*
- *Prodotto logico (AND).*

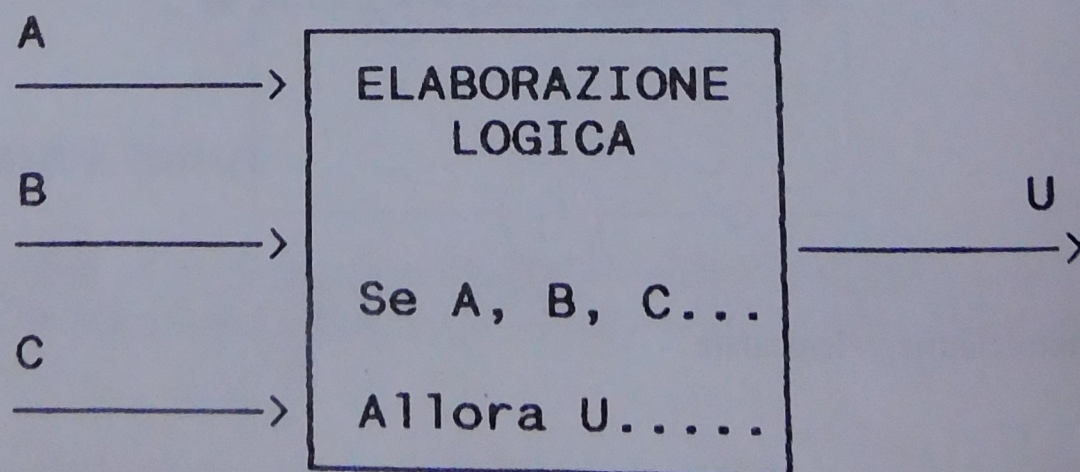


Fig. 1.3 - Schematizzazione di una generica operazione logica a tre ingressi.

Affermazione (YES)

L'affermazione, o operazione **YES**, è l'elaborazione che dà in uscita $U = 1$ se la variabile d'ingresso è $A = 1$ e $U = 0$ se la variabile d'ingresso è $A = 0$.

L'operazione è sintetizzata con la scrittura algebrica:

$$U = A$$

che si legge «U è uguale ad A»; nella Fig. 1.4 è riportato il suo simbolo grafico unificato dall'IEC (Comitato Elettrotecnico Internazionale).

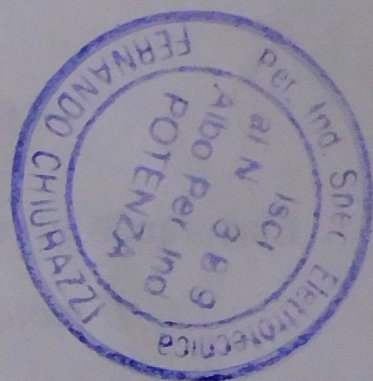
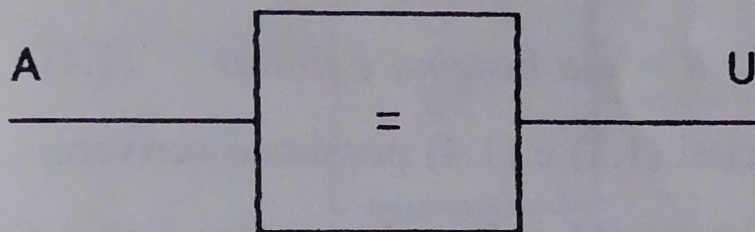


Fig. 1.4 - Simbolo IEC dell'operazione YES.

Per mostrare il procedimento che consente di trasformare una forma letterale in un'espressione algebrica, considereremo, per ciascuna operazione logica, esempi a partire da semplici enunciati:

$$L = \text{«la lampada è accesa»} \quad (1.1)$$

$$I = \text{«l'interruttore è chiuso»} \quad (1.2)$$

Elaborando gli enunciati (1.1) e (1.2) possiamo scrivere:

La lampada è accesa ($L = 1$) se l'interruttore è chiuso ($I = 1$)

Tale elaborazione costituisce l'operazione YES $L = I$ poiché $L = 1$ se $I = 1$ e $L = 0$ se $I = 0$.

Negazione (NOT)

La negazione, o operazione **NOT**, è l'elaborazione che dà in uscita un valore opposto a quello della variabile d'ingresso; pertanto se l'ingresso è $A = 0$ l'uscita è $U = 1$ e viceversa.

Una **variabile negata** si indica con un trattino sopra alla lettera con cui la si individua e pertanto l'operazione di negazione è sintetizzata dalla relazione:

$$U = \bar{A}$$

che si legge «U è uguale ad A negato»; in Fig. 1.5 è riportato il simbolo grafico IEC della negazione.

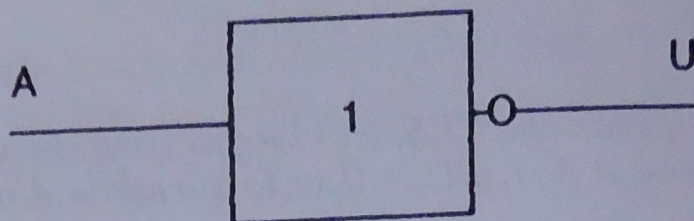


Fig. 1.5 - Simbolo IEC dell'operazione NOT.

Consideriamo gli enunciati:

$$M = \text{«il motore s'avvia»} \quad (1.3)$$

$$B = \text{«la benzina è finita»} \quad (1.4)$$

Elaborando gli enunciati (1.3) e (1.4) possiamo scrivere:

*Il motore s'avvia ($M = 1$) se la benzina **non** è finita ($B = 0$)*

Tale elaborazione costituisce l'operazione NOT $M = \bar{B}$ poiché $M = 1$ se $B = 0$ e viceversa $M = 0$ se $B = 1$.

Somma logica (OR)

*La somma logica di n variabili, o operazione **OR ad n ingressi**, è un'elaborazione che dà in uscita $U = 1$ se almeno una delle n variabili d'ingresso vale 1.*

Il segno convenzionale di tale operazione è il segno di addizione e pertanto l'OR è espressa dalla relazione algebrica:

$$U = A + B + C + \dots + N$$

che si legge « U è uguale ad A or B or C or... or N » e che sta ad indicare che $U = 1$ quando A oppure B oppure C oppure... oppure N vale 1.

Nella Fig. 1.6 viene fornito il simbolo IEC della somma logica.

Consideriamo gli enunciati:

$$U = \text{«Andrea ascolta la musica»} \quad (1.5)$$

$$A = \text{«Andrea ha il giradischi»} \quad (1.6)$$

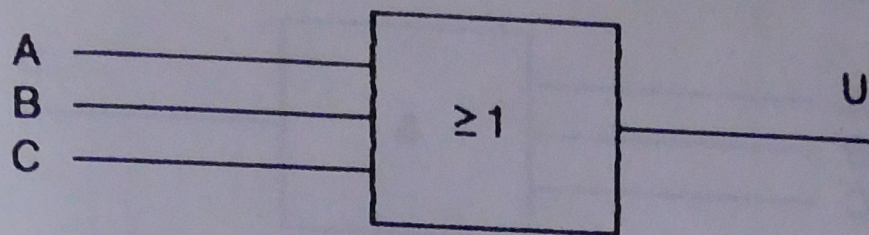
$$B = \text{«Andrea ha la radio»} \quad (1.7)$$

essi si possono elaborare nel seguente modo:

*Andrea ascolta la musica ($U = 1$) se ha il giradischi ($A = 1$)
oppure se ha la radio ($B = 1$)*

Tale elaborazione costituisce l'operazione OR $U = A + B$; infatti è $U = 1$ se $A = 1$ e $B = 0$ oppure se $A = 0$ e $B = 1$ oppure se $A = 1$ e $B = 1$, mentre è $U = 0$ se $A = 0$ e $B = 0$.

OR a tre ingressi



OR a due ingressi

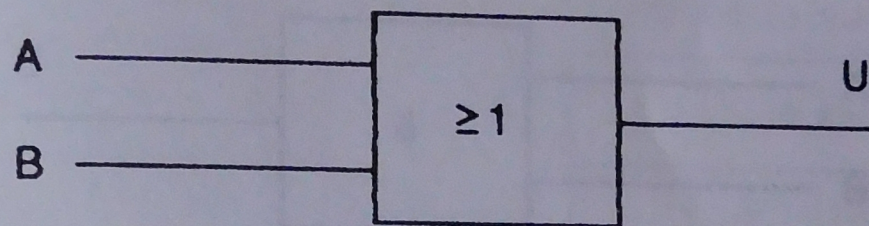


Fig. 1.6 - Simbolo IEC dell'operazione OR.

Prodotto logico (AND)

Il prodotto logico di n variabili, o operazione **AND** ad n ingressi, è un'elaborazione che dà in uscita $U = 1$ solo quando tutte le variabili d'ingresso $A, B, C, \dots, N$ valgono 1.

Il segno convenzionale di tale operazione è il segno di moltiplicazione e pertanto l'AND, per esempio a tre ingressi, può essere indicata in ciascuno dei seguenti modi equivalenti:

$$U = A \times B \times C \quad U = A * B * C \quad U = A \cdot B \cdot C \quad U = ABC$$

Nel seguito della trattazione useremo la seconda notazione con la quale il prodotto logico di n variabili si scrive:

$$U = A * B * C * \dots * N$$

e si legge «U è uguale ad A and B and C and ... and N».

Essa sta ad indicare che $U = 1$ quando $A = 1, B = 1, C = 1 \dots N = 1$ contemporaneamente.

Il simbolo IEC dell'operazione AND è dato in Fig. 1.7.

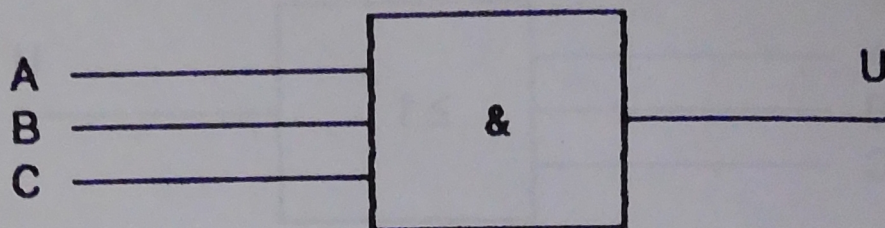
Con riferimento alla Fig. 1.2 consideriamo gli enunciati:

$$L = \text{«la lampada è accesa»} \quad (1.8)$$

$$I = \text{«l'interruttore è chiuso»} \quad (1.9)$$

$$G = \text{«il generatore è in funzione»} \quad (1.10)$$

AND a tre ingressi



AND a due ingressi

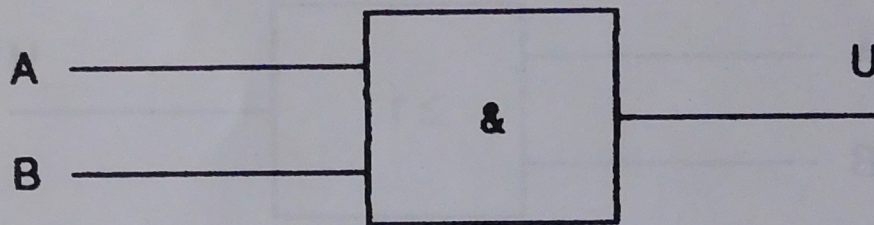


Fig. 1.7 - Simbolo IEC dell'operazione AND.

L'elaborazione delle proposizioni (1.8), (1.9) e (1.10) in base alla quale:

*la lampada è accesa ($L = 1$) se l'interruttore è chiuso ($I = 1$)
ed il generatore è in funzione ($G = 1$)*

costituisce un'operazione AND $L = I * G$; infatti $L = 1$ se, e solo se, sia I che G valgono 1 mentre $L = 0$ in tutti gli altri casi.

In tutti gli esempi considerati l'uscita corrisponde alla variabile dipendente mentre gli ingressi costituiscono le variabili indipendenti.

Notiamo infine che le prime due operazioni YES e NOT sono applicabili ad una singola variabile d'ingresso mentre la OR e la AND si applicano ad un numero qualsiasi di variabili, a partire da due.

1.6 - Tabella delle combinazioni

*Le operazioni logiche si possono descrivere mediante una tabella, che prende il nome di **tabella delle combinazioni** o **tabella delle verità** e che indica i valori d'uscita relativi a tutte le possibili combinazioni delle variabili d'ingresso.*

Poiché per ognuna di tali variabili esistono solo gli stati logici 0 ed 1, con due di esse ci saranno 2^2 possibilità, con tre 2^3 possibilità etc...

Generalizzando si può affermare che:

date n variabili il numero delle combinazioni N_c dei possibili stati è dato da

$$N_c = 2^n$$

Nella Fig. 1.8 sono rappresentate le tabelle delle combinazioni delle operazioni logiche fondamentali.

YES

U = A	
A	U
0	0
1	1

NOT

U = $\bar{A}$	
A	U
0	1
1	0

AND a due variabili

U = A * B		
A	B	U
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR a due variabili

U = A + B		
A	B	U
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND a tre variabili

U = A * B * C			
A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

OR a tre variabili

U = A + B + C			
A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fig. 1.8 - Tabelle delle combinazioni delle operazioni logiche fondamentali.

Il nome «tabella delle verità» deriva dal fatto che in effetti ogni operazione logica costituisce un'elaborazione di una o più proposizioni che possono essere Vere o False.

Ad esempio il significato della tabella dell'operazione OR a due ingressi data in Fig. 1.8 è quello della Fig. 1.9.

A	B	U		Andrea ha il giradischi	Andrea ha la radio	Andrea ascolta la musica
0	0	0		Falso	Falso	Falso
0	1	1		Falso	Vero	Vero
1	0	1	→	Vero	Falso	Vero
1	1	1		Vero	Vero	Vero

Fig. 1.9

1.7 - Formalizzazione letterale e simbolica di un problema logico

Il concetto di proposizione logica costituisce la base teorica della **formalizzazione letterale** di un problema logico.

Una volta individuati tutti gli enunciati che lo descrivono è possibile tradurlo in **forma simbolica** assegnando i «valori di verità» (0 od 1) a tutte la variabili.

In questo capitolo affronteremo problemi molto semplici; andando avanti nella trattazione prenderemo in esame casi via via più complessi.

Illustriamo il procedimento di formalizzazione letterale e simbolica attraverso due esercizi.

Esercizio 1.1

Consideriamo un sistema antifurto, installato in un locale di tre stanze, costituito da tre sensori ad ultrasuoni collegati ad una centralina.

Questa deve emettere un segnale d'allarme nel caso in cui sia rilevata la presenza di persone in una delle tre stanze.

Porre il problema sotto forma letterale e quindi tradurlo nella forma simbolica.

Il problema si pone nella seguente forma letterale:

Se viene attivato il sensore nella stanza 1 oppure quello della stanza 2 oppure quello della stanza 3 allora la centralina deve emettere l'allarme.

Gli enunciati che descrivono il caso in esame sono pertanto:

- S_1 = «il sensore della stanza 1 è attivo»
- S_2 = «il sensore della stanza 2 è attivo»
- S_3 = «il sensore della stanza 3 è attivo»
- C = «la centralina è in allarme»

Con tali posizioni il problema si può scrivere in forma simbolica:

- se $S_1 = 0$ ed $S_2 = 0$ ed $S_3 = 0$ allora $C = 0$
- se $S_1 = 0$ ed $S_2 = 0$ ed $S_3 = 1$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 0$ ed $S_2 = 1$ ed $S_3 = 0$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 0$ ed $S_2 = 1$ ed $S_3 = 1$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 1$ ed $S_2 = 0$ ed $S_3 = 0$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 1$ ed $S_2 = 0$ ed $S_3 = 1$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 1$ ed $S_2 = 1$ ed $S_3 = 0$ allora $C = 1$
- se $S_1 = 1$ ed $S_2 = 1$ ed $S_3 = 1$ allora $C = 1$

Andando avanti nel corso vedremo come si procede, da questo punto in poi, per risolvere problemi di questo tipo; per il momento osserviamo che l'operazione OR a tre ingressi:

$$C = S_1 + S_2 + S_3 \quad (1.11)$$

costituisce la soluzione del caso in esame dal momento che, per definizione di somma logica:

$$C = 1 \text{ (centralina in allarme)}$$

quando

$$S_1 = 1 \text{ (sensore stanza 1 attivo) oppure}$$

$$S_2 = 1 \text{ (sensore stanza 2 attivo) oppure}$$

$$S_3 = 1 \text{ (sensore stanza 3 attivo)}$$

Vale la corrispondenza della Fig. 1.10.

Esercizio 1.2

In una stazione di controllo qualità si verificano tre prestazioni di un certo prodotto; solo se tutte e tre rientrano entro limiti prestabiliti il prodotto può essere accettato.

Porre il problema sottoforma letterale e poi tradurlo in forma simbolica.

Il problema si pone nella seguente forma letterale:

Se è verificata la prima prestazione ed è verificata la seconda ed è verificata la terza allora il prodotto è buono.

S1	S2	S3	C		Sensore 1 attivo	Sensore 2 attivo	Sensore 3 attivo	Centrale in allarme
0	0	0	0		Falso	Falso	Falso	Falso
0	0	1	1		Falso	Falso	Vero	Vero
0	1	0	1		Falso	Vero	Falso	Vero
0	1	1	1		Falso	Vero	Vero	Vero
1	0	0	1	→	Vero	Falso	Falso	Vero
1	0	1	1		Vero	Falso	Vero	Vero
1	1	0	1		Vero	Vero	Falso	Vero
1	1	1	1		Vero	Vero	Vero	Vero

Fig. 1.10

Gli enunciati che descrivono il caso in esame sono:

- $A = \text{«la prima prestazione è verificata»}$
- $B = \text{«la seconda prestazione è verificata»}$
- $C = \text{«la terza prestazione è verificata»}$
- $U = \text{«il prodotto è buono»}$

Con tali posizioni il problema simbolico si scrive:

- $\text{se } A = 0 \text{ e } B = 0 \text{ e } C = 0 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 0 \text{ e } B = 0 \text{ e } C = 1 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 0 \text{ e } B = 1 \text{ e } C = 0 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 0 \text{ e } B = 1 \text{ e } C = 1 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 1 \text{ e } B = 0 \text{ e } C = 0 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 1 \text{ e } B = 0 \text{ e } C = 1 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 1 \text{ e } B = 1 \text{ e } C = 0 \text{ allora } U = 0$
- $\text{se } A = 1 \text{ e } B = 1 \text{ e } C = 1 \text{ allora } U = 1$

In tal caso è l'operazione AND a tre ingressi:

$$U = A * B * C \quad (1.12)$$

che risolve il problema, infatti, essendo la (1.12) un prodotto logico si ha:

$$U = 1 \text{ (pezzo buono)}$$

quando

- $A = 1 \text{ (prestazione 1 verificata) e}$
- $B = 1 \text{ (prestazione 2 verificata) e}$
- $C = 1 \text{ (prestazione 3 verificata)}$

Vale la corrispondenza della Fig. 1.11.

A	B	C	U		Prestazione 1 verificata	Prestazione 2 verificata	Prestazione 3 verificata	Pezzo buono
0	0	0	0	→	Falso	Falso	Falso	Falso
0	0	1	0		Falso	Falso	Vero	Falso
0	1	0	0		Falso	Vero	Falso	Falso
0	1	1	0		Falso	Vero	Vero	Falso
1	0	0	0		Vero	Falso	Falso	Falso
1	0	1	0		Vero	Falso	Vero	Falso
1	1	0	0		Vero	Vero	Falso	Falso
1	1	1	1		Vero	Vero	Vero	Vero

Fig. 1.11